MATEMATICA - LEZIONE 16

venerdì 24 ottobre 2025 11:01

Numeri complessi

- In $\mathbb{R}$ l'equazione $x^2+1=0$ non ha soluzioni. Più in generale:
  $x^2+a=0$ non ha soluzioni (reali) se $a>0$.

- Si introduce un nuovo numero i detto UNITÀ IMMAGINARIA che ha la proprietà $i^2=-1$.

Def Un NUMERO COMPLESSO è un numero della forma $x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

L'insieme dei num. complessi si indica con $\mathbb{C}$. Quindi

$$\mathbb{C} = \{ x+iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2=-1 \}$$

ESEMPI DI NUMERI COMPLESSI

- $2+3i$
- $-7+4i$
- $\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$
- $1+\pi i$
- $i = 0+i\cdot 1 \in \mathbb{C}$
- $2 = 2+0\cdot i \in \mathbb{C}$

OSS

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \quad (x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x + 0 \cdot i \in \mathbb{C})$

Def:

Sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

- x è detto PARTE REALE di z $(\operatorname{Re}(z))$
- y è detto PARTE IMMAGINARIA di z $(\operatorname{Im}(z))$
- La scrittura $z = x + iy$ è detta FORMA ALGEBRICA o FORMA CARTESIANA di z.

ESEMPI

1) $z = 2 + 3i$

$\operatorname{Re}(z) = 2 \qquad \operatorname{Im}(z) = 3$

2) $z = -2 + \pi i \qquad \operatorname{Re}(z) = -2 \qquad \operatorname{Im}(z) = \pi$

3) $z = i - 3 = -3 + i \qquad \operatorname{Re}(z) = -3 \qquad \operatorname{Im}(z) = 1$

4) $z = 2 - i \qquad \operatorname{Re}(z) = 2, \quad \operatorname{Im}(z) = -1$

OSS

1) Sia $z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$

2) Se $z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Somma e prodotto di numeri complessi.

I numeri complessi si possono sommare e moltiplicare tra loro seguendo le usuali regole del calcolo algebrico:

Def

Siano $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2 \in \mathbb{C}$.
Definiamo:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Motivazione della formula:

$$(x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2)$$

$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + \underbrace{i^2}_{-1} y_1 y_2$$

$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 - y_1 y_2$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ESEMPI

$$(2 + i)(3 - i) = 6 - 2i + 3i - i^2$$

$$= 6 - 2i + 3i + 1$$

$$= 7 + i$$ (forma algebrica di $(2+i) \cdot (3-i)$)

$$\mathrm{Re}\left((2+i)(3-i)\right) = 7$$

$$\mathrm{Im}\left((2+i)(3-i)\right) = 1$$

- $i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i = 0 - i$

  $\mathrm{Re}(i^3) = 0$

  $\mathrm{Im}(i^3) = -1$

- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$

oss: Potenze di i:

i
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$
$i^6 = -1$

(le potenze di i si ripetono)

oss

- L'equazione $z^2+1=0$ ha due soluzioni complesse $(\pm i)$. Infatti:

$$\begin{aligned} z^2+1=0 &\iff z^2-(-1)=0 \\ &\iff z^2-i^2=0 \\ &\iff (z+i)(z-i)=0 \\ &\iff z+i=0 \ \vee\ z-i=0 \\ &\iff z=-i \ \vee\ z=i.) \end{aligned}$$

- Sia $a \in \mathbb{R}$, $a>0$. L'equazione $z^2+a=0$ ha due soluzioni complesse. $(z=\pm i\sqrt{a})$. Infatti

$$\begin{aligned} z^2+a=0 &\iff z^2-(-1)a=0 \\ &\iff z^2-i^2(\sqrt{a})^2=0 \\ &\iff z^2-(i\sqrt{a})^2=0 \\ &\iff (z+i\sqrt{a})(z-i\sqrt{a})=0 \\ &\iff z=\pm i\sqrt{a} \end{aligned}$$

ESEMPI:

1) $z^2 = -2 \iff z = \pm i\sqrt{2}$

2) $z^2 = 2 \iff z = \pm\sqrt{2}$

3) $z^2 = -\pi \iff z = \pm i\sqrt{\pi}$

OSS Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Consideriamo l'equazione: $az^2 + bz + c = 0$

1) Se $\Delta > 0$, l'eq. ha due soluzioni reali $\frac{-b \pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

2) Se $\Delta < 0$, l'eq ha due soluzioni complesse $\frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

3) Se $\Delta = 0$, l'eq ha una soluzione reale $z = -\frac{b}{2a}$

ESEMPIO

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \qquad \Delta = 4 - 20 = -16$$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

OSS

1) In $\mathbb{C}$ le operazioni di somma e prodotto godono delle stesse proprietà che valgono in $\mathbb{R}$.

2) In $\mathbb{C}$ vale la legge di annullamento del prodotto: $z_1 \cdot z_2 = 0 \iff z_1 = 0 \vee z_2 = 0$.

3) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \; \exists ! \; w \in$ t.c. $z \cdot w = 1$.
(w si indica con $\frac{1}{z}$).

Domanda: Dato $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Qual è la forma algebrica di $\frac{1}{z}$?

Def: Sia $z \in \mathbb{C}$. Definiamo CONIUGATO DI z il numero complesso $\bar{z} := \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$
(cioè $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$).

ESEMPI

- $z = 4 + i$ $\qquad \bar{z} = 4 - i$
- $z = 7 - 4i$ $\qquad \bar{z} = 7 + 4i$
- $z = 3$ $\qquad \bar{z} = 3$
- $z = 8i$ $\qquad \bar{z} = -8i$

Def: Sia $z \in \mathbb{C}$. Si definisce MODULO DI z il numero reale $|z|$ definito da
$$|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$
($z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$|2+4i| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$$

$$|3-i| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$|i| = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$|4| = \sqrt{4^2+0^2} = \sqrt{16} = 4$$

OSS Se $z = x+iy$ ma $y=0$.

$$\underbrace{|z|}_{\text{MODULO DI } z} = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = \underbrace{|x|}_{\text{VALORE ASSOLUTO}}$$

OSS Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora:

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy)$$

$$= x^2 - (iy)^2$$

$$= x^2 - i^2 y^2 = x^2+y^2 = |z|^2$$

Quindi $\boxed{z \cdot \bar{z} = |z|^2}$. In particolare

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \quad \text{cioè} \quad \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

PROPRIETÀ:

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}}_{\text{FORMA ALGEBRICA DI } \frac{1}{z}}$$

ESEMPI

$$\frac{1}{2+i} = ?$$

$$|2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{2+i} = 2-i$$

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2}{5} - i\frac{1}{5}$$

<u>Metodo alternativo</u> (equivalente)

$$\frac{1}{2+i}$$

Moltiplicare e dividere per il coniugato del denominatore.

$$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{(2+i)} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{2^2-(i)^2} = \frac{2-i}{4+1}$$

$$= \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$$

ESERCIZIO

Scrivere in forma algebrica il numero complesso $z = \dfrac{2+i}{4+3i}$

$$z = \frac{2+i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{(2+i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$$

$$= \frac{8-6i+4i-3i^2}{4^2-(3i)^2} = \frac{8-6i+4i+3}{16+9}$$

$$= \frac{11-2i}{25} = \underbrace{\frac{11}{25} - \frac{2}{25}i}_{\text{FORMA ALGEBRICA DI } z.}$$

ESERCIZIO

Determinare la parte reale e la parte immaginaria di $z = \dfrac{i-1}{2-i}$

$$z = \frac{(i-1)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2i + i^2 - 2 - i}{2^2 - i^2}$$

$$= \frac{2i - 1 - 2 - i}{4+1}$$

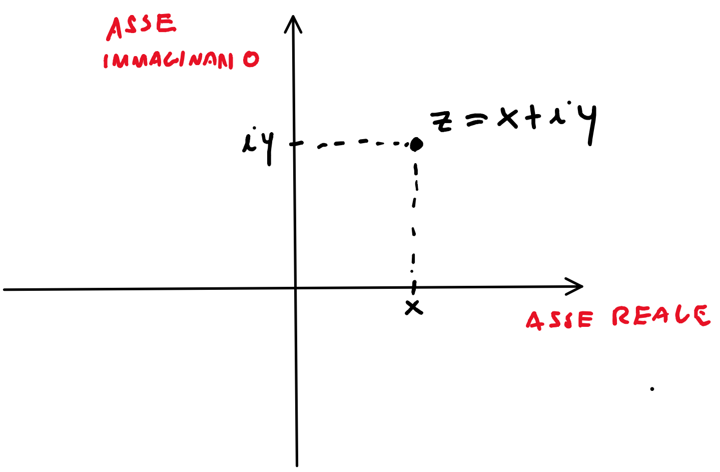
$$= \frac{-3+i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{i}{5}$$

$$\operatorname{Re}(z) = -\frac{3}{5} \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{5}$$

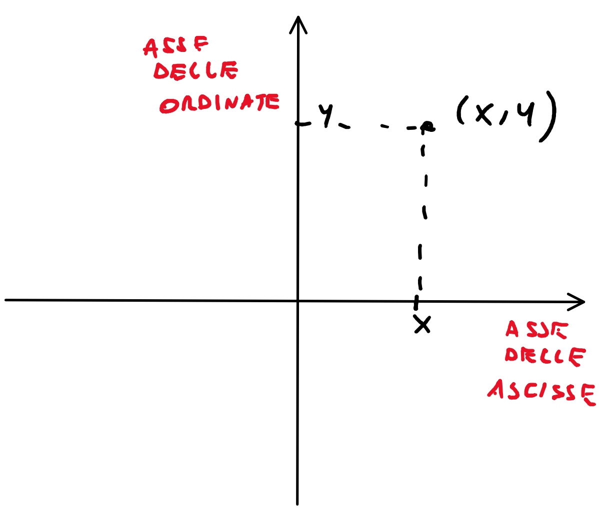
Rappresentazioni grafiche dei numeri complessi

Identificando $z = x + iy$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può rappresentare $\mathbb{C}$ come un piano in modo simile a quanto avviene per $\mathbb{R}^2$.

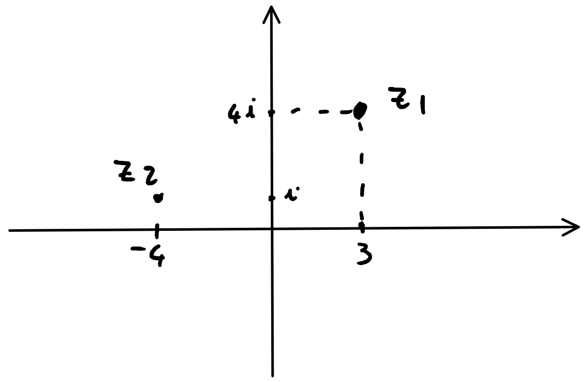
PIANO COMPLESSO ($\mathbb{C}$)



PIANO CARTESIANO ($\mathbb{R}^2$)



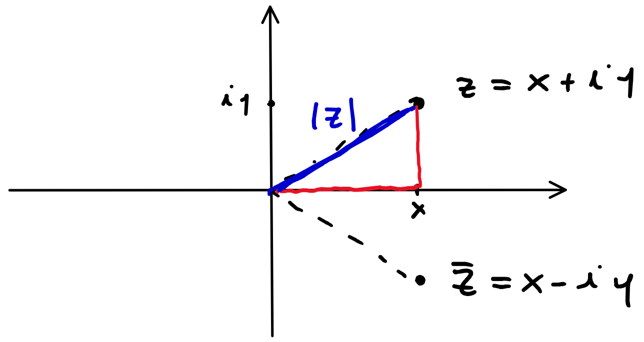
ESEMPI :



$z_1 = 3 + 4i$

$z_2 = -4 + i$

Interpretazioni grafiche di coniugato e modulo

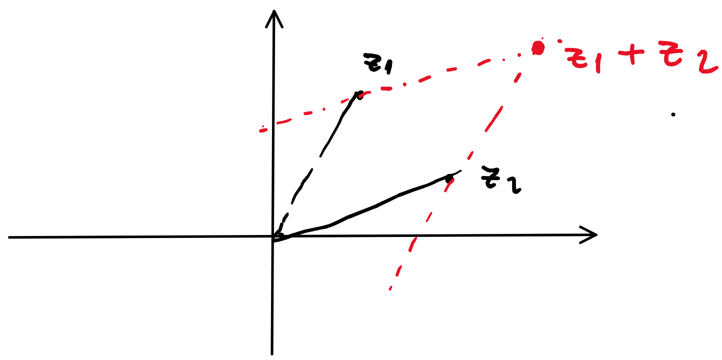


- $\bar{z} = x - iy$ è il simmetrico di z rispetto all'asse reale
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ è la distanza da 0.

Dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $|z_1 - z_2|$ è la distanza tra z_1 e z_2 nel piano complesso.

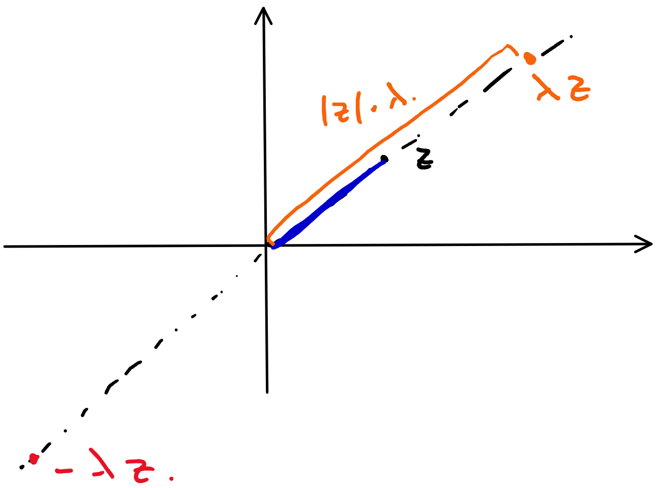
• Interpretazioni grafiche di somma e prodotto

- Dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

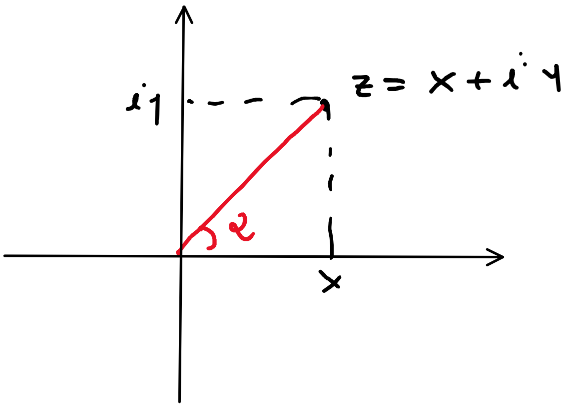


$z_1 + z_2$ è il punto individuato dalla regola del parallelogramma

- Dato $z \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$



Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi



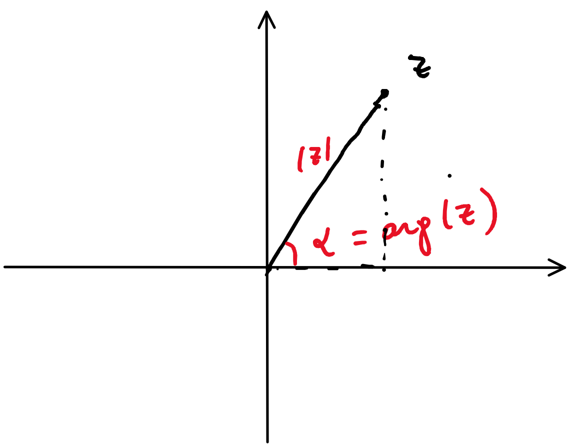
z può essere individuato

1) Da $Re(z) = x$, $Im(z) = y$.
2) Da $|z|$ e α

dove α è l'angolo tra il semiasse reale positivo e il segmento che congiunge z con 0.

α È DETTO ARGOMENTO di z ($arg(z)$).

- Se conosciamo α e $|z|$ si possono trovare x e y con le formule:



$$x = |z| \cos \alpha$$
$$y = |z| \sin \alpha$$

Quindi

$$z = |z| \cos\alpha + i\,|z| \sin\alpha$$
$$= |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA DI z

- Se conosciamo x, y come si trovano $|z|$ e α?

1) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2) α è l'unico angolo che soddisfa:

$$\cos\alpha = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{x}{|z|} \quad \text{e} \quad \sin\alpha = \frac{Im(y)}{|z|} = \frac{y}{|z|}$$

cioè

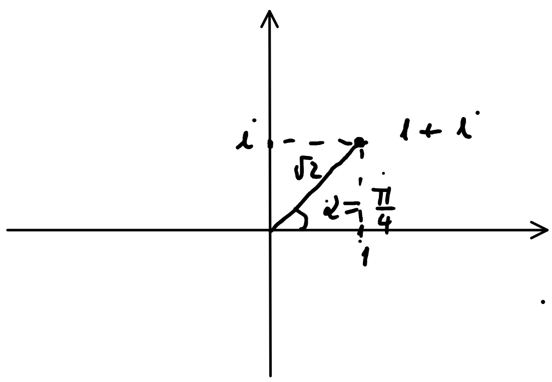
$$\alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ \left(\text{o } \frac{3}{2}\pi\right) & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

ESEMPI

1) $z = 1 + i$

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\alpha = ?$



$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Forma trigonometrica:

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$
$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

2) $z = \sqrt{3} - i$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin \alpha = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{6} \quad \left(\text{o } \frac{11}{6}\pi \right)$$ Quindi:

$$z = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$
$$= 2 \left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{11}{6}\pi\right) \right)$$

3) $z = 2 + i$ $\qquad Re(z) = 2, \; Im(z) = 1$

$$|z| = \sqrt{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

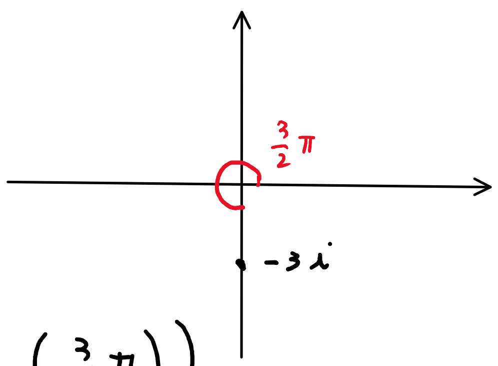
$$z = \sqrt{5} \left(\cos\left(\arctan \frac{1}{2}\right) + i \sin\left(\arctan \frac{1}{2}\right) \right).$$

4) $z = -3i$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\alpha = \frac{3}{2}\pi \quad \left(\text{o } -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$z = 3 \left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \right)$$



Interpretazione grafica del prodotto in $\mathbb{C}$
(tramite rappresentazioni trigonometriche)

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$z_1 = |z_1| (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$$
$$z_2 = |z_2| (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_1| (\overbrace{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}^{\cos(\alpha_1+\alpha_2)} + i \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2)$$
$$= |z_1||z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Concludiamo che:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$$
$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \alpha_1 + \alpha_2$$

Moltiplicare z_1 per z_2 significa:
Moltiplicare la distanza di z_1 da 0 per $|z_2|$ e poi ruotare in senso antiorario di un angolo pari ad α_2.